



TITLE:

# 平面路の数え上げと離散可積分系 (可積分数理の新潮流)

AUTHOR(S):

上岡, 修平

---

CITATION:

上岡, 修平. 平面路の数え上げと離散可積分系 (可積分数理の新潮流). 数理解析研究所講究録 2009, 1650: 173-189

ISSUE DATE:

2009-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140766>

RIGHT:

## 平面路の数え上げと離散可積分系

京都大学大学院情報学研究科 上岡 修平 (Shuhei Kamioka)

Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics,  
Kyoto University

### 1 はじめに

直交関数系は数え上げ組合せ論において重要な役割を果たすが、ここで注目するのは直交多項式に対する Viennot [7] の研究である。そこでは直交多項式に対応する線形汎関数のモーメントが Motzkin 路なる平面路の重みの和とみなされ、直交多項式の持つ様々な性質、例えば直交性や行列式表現などが Motzkin 路の構造から代数的に導かれる。一方で直交関数系は連続・離散を問わず可積分系と密接に関わっている。例えば直交多項式の 1 パラメータ変形として連続および離散時間の半無限戸田方程式が現れることはよく知られている。これらのことから可積分系の持つ数え上げ組合せ論的な構造を論じ得ることが期待される。

本報告では数え上げ組合せ論の立場から離散時間半無限の戸田方程式および離散時間半無限の相対論的戸田方程式を捉え直す。具体的には (i) 直交多項式のスペクトル変換から前者が生ずるという事実を Motzkin 路の言葉で証明し、また (ii) Laurent 双直交多項式のスペクトル変換から後者が生ずるという事実を Schröder 路なる平面路の言葉で証明する。

本報告を通して  $\mathbb{K}$  を体とし、 $i, j, n, \ell$  は整数であると約束する。

### 2 直交関数系と平面路の数え上げ

まず準備として直交多項式と Laurent 双直交多項式を組合せ論の言葉で理解する。前者および後者に対応する線形汎関数のモーメントはそれぞれ Motzkin 路および Schröder 路の重みの和とみなされる。

#### 2.1 直交多項式と Motzkin 路

直交多項式の定義と最も基本的な性質を挙げる ([6] などを参照)。次の二つの条件を満たす  $\mathbb{K}[z]$  上の多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  を直交多項式列といい、その各項を直交多項式という。

- 任意の  $n \geq 0$  について  $\deg(P_n(z)) = n$  である。
- ある線形汎関数  $L: \mathbb{K}[z] \rightarrow \mathbb{K}$  があって、任意の  $n \geq 0$  について直交性

$$L[z^\ell P_n(z)] \begin{cases} = 0, & 0 \leq \ell \leq n-1, \\ \neq 0, & \ell = n \end{cases} \quad (1)$$

を持つ。

簡単のためここではさらに次の二つの条件を課す。

- 全ての  $n \geq 0$  について  $P_n(z)$  の最高次の係数は 1 である。

- $L[1] = 1$  である.

直交多項式列と線形汎関数の間の対応をみておく.  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  を上の直交多項式列とすると, 対応する線形汎関数  $L$  は漸化式

$$L[1] = 1, \quad L[z^\ell] = - \sum_{k=0}^{\ell-1} p_{\ell,k} L[z^k], \quad \ell \geq 1 \quad \text{where } P_\ell(z) = z^\ell + \sum_{k=0}^{\ell-1} p_{\ell,k} z^k \quad (2)$$

を満たし, かつ 0-正規すなわち任意の  $n \geq 0$  について  $L$  のモーメントのなす Hankel 行列式

$$H_n = \det \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-2} \end{bmatrix} \quad \text{where } m_\ell = L[z^\ell]$$

は非零である. 逆に  $L: \mathbb{K}[z] \rightarrow \mathbb{K}$  を 0-正規な線形汎関数とすると, それについて直交性 (1) を持つ直交多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  は一意に定まり, 行列式を用いて

$$P_n(z) = (H_n)^{-1} \det \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{bmatrix} \quad \text{where } m_\ell = L[z^\ell] \quad (3)$$

と書かれる. 従って直交多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  と 0-正規な線形汎関数  $L$  は一対一に対応し, (2) と (3) はそれらの間の全単射を与える.

直交多項式に関わる最も基本的な命題の一つにいわゆる Favard の定理がある:  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  を直交多項式列とするとそれは

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z - c_0, \quad \text{where } b_n \neq 0 \quad (4)$$

$$P_{n+1}(z) = (z - c_n)P_n(z) - b_n P_{n-1}(z), \quad n \geq 1$$

の漸化式を満たす. 係数  $b_n, c_n$  は

$$b_1 = -p_{2,0} - c_1 p_{1,0}, \quad c_0 = -p_{1,0}$$

$$b_{n+1} = p_{n+1,n-1} - p_{n+2,n} - c_{n+1} p_{n+1,n}, \quad c_n = p_{n,n-1} - p_{n+1,n}, \quad n \geq 1$$

$$\text{where } P_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k} z^k \quad (5)$$

と書かれる. 逆に (4) の形の漸化式によりつくられる多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  は直交多項式列である. 従って直交多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  と漸化式の係数  $((b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty})$  ( $b_n \neq 0$ ) は一対一に対応し, (4) と (5) はそれらの間の全単射を与える.

以上のことから次が分かる: 0-正規な線形汎関数  $L$  と漸化式の係数  $((b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty})$  ( $b_n \neq 0$ ) は一対一に対応する. 前者を後者に写す全単射である (3) と (5) の合成は

$$b_n = \frac{H_{n+1}H_{n-1}}{H_n H_n}, \quad c_n = \frac{\tilde{H}_{n+1}}{H_{n+1}} - \frac{\tilde{H}_n}{H_n}$$

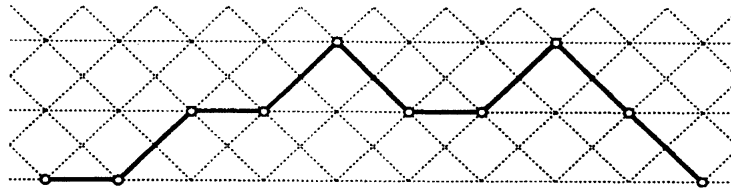


図 1: グラフ  $G$  上の Motzkin 路 (長さ 9) .

と書かれる. ただし  $\tilde{H}_n$  は Hankel 行列式  $H_n$  の最終列において添字を 1 だけ増やしたもので

$$\tilde{H}_n = \det \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-2} & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n-1} & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-3} & m_{2n-1} \end{bmatrix} \quad \text{where } m_\ell = L[z^\ell]$$

である. それでは後者を前者に写す全単射である (4) と (2) の合成はどう書かれるか. これが本節の主題である.

線形汎関数のモーメント  $L[z^\ell]$  に対する母関数

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} L[z^\ell] z^\ell$$

を Stieltjes 関数というが, これは Jacobi 型の連分数 (J-連分数)

$$J(z) = \frac{1}{1 - c_0 z - \frac{b_1 z^2}{1 - c_1 z - \frac{b_2 z^2}{1 - c_2 z - \frac{b_3 z^2}{\cdots}}}}$$

と形式的冪級数環  $\mathbb{K}[[z]]$  の上で一致する ( $f(z) \in \mathbb{K}[[z]]$  ( $f(0) \neq 0$ ) の逆元  $(f(z))^{-1}$  を  $1/f(z)$  と書いている). ここで係数  $b_n, c_n$  は直交多項式の漸化式 (4) のそれである. この Stieltjes 関数の連分数表示を足がかりに Motzkin 路を導入する. 有向グラフ  $G$  を節点集合

$$V(G) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n = \{(i, n); i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$$

と枝集合

$$\begin{aligned} E(G) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n, \\ U_n &= \{((i, n), (i+1, n+1)) \in V_n \times V_{n+1}\}, \\ D_n &= \{((i, n), (i+1, n-1)) \in V_n \times V_{n-1}\}, \\ H_n &= \{((i, n), (i+1, n)) \in V_n \times V_n\} \end{aligned}$$

により構成されるものとする. この  $G$  上の路を *Motzkin 路* という (図 1 参照).  $U_n, D_n, H_n$  に

含まれる枝をそれぞれ斜め上枝 (up-diagonal edge), 斜め下枝 (down-diagonal edge), 水平枝 (horizontal edge) とよぶ. Motzkin 路  $\pi$  の長さを  $\ell(\pi)$  と書き

$$\ell(\pi) = i' - i \quad \text{if } \pi \text{ goes from } (i, j) \text{ to } (i', j')$$

と定める. すなわち始点から終点まで水平 ( $x$ -軸) 方向に進んだ距離が長さである. 特に  $(0, 0)$  から  $(\ell, 0)$  への長さ  $\ell$  の Motzkin 路の全体を  $M_\ell$  と表す. Motzkin 路に重みを与える. まず  $G$  の各枝に漸化式 (4) の係数を用いて

$$w(e) = \begin{cases} 1, & e \in U_n, \\ b_n, & e \in D_n, \\ c_n, & e \in H_n \end{cases} \quad (6a)$$

とラベルを付ける. そして Motzkin 路  $\pi$  の重み  $w(\pi)$  を

$$w(\pi) = \prod_{e \text{ in } \pi} w(e) \quad (6b)$$

と定める. ここで積は路  $\pi$  を構成する全ての枝にわたってとる. 例えば図 1 の Motzkin 路の重みは  $b_1(b_2)^2 c_0(c_1)^2$  である. さらに Motzkin 路の集合  $\Pi$  に対してそれに含まれる路の重みの和を  $w(\Pi)$  と書く:

$$w(\Pi) = \sum_{\pi \in \Pi} w(\pi). \quad (6c)$$

例えば  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  かつ  $b_n = c_n = 1$  のとき  $w(M_\ell) = \#M_\ell$  は Motzkin 数 (OEIS [4] の A001006: 1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, ...) となる.

**補題 1 (Flajolet [1]).** Motzkin 路の重みの和  $w(M_\ell)$  に対する母関数

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} w(M_\ell) z^\ell$$

は形式的冪級数環  $\mathbb{K}[[z]]$  の上で  $J$ -連分数  $J(z)$  に等しい.

すなわち線形汎関数  $L$  のモーメントは Motzkin 路の重みの和として

$$L[z^\ell] = w(M_\ell), \quad \ell \geq 0 \quad (7)$$

と書かれる. 標語的にいうと, 線形汎関数のモーメント  $L[z^\ell]$  は  $(0, 0)$  から  $(\ell, 0)$  への長さ  $\ell$  の Motzkin 路を数え上げることによって計算することができる. 例えば

$$\begin{aligned} L[1] &= w(M_0) = 1, \\ L[z] &= w(M_1) = c_0, \\ L[z^2] &= w(M_2) = b_1 + (c_0)^2, \\ L[z^3] &= w(M_3) = 2b_1c_0 + b_1c_1 + (c_0)^3, \\ L[z^4] &= w(M_4) = b_1b_2 + (b_1)^2 + 3b_1(c_0)^2 + 2b_1c_0c_1 + b_1(c_1)^2 + (c_0)^4. \end{aligned}$$

この (7) が (4) と (2) の合成であり, 直交多項式の漸化式の係数  $((b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty)$  ( $b_n \neq 0$ ) を 0-正規な線形汎関数  $L$  に写す全単射である.

## 2.2 Laurent 双直交多項式と Schröder 路

Laurent 双直交多項式の定義と最も基本的な性質を挙げる ([9] などを参照). 次の二つの条件を満たす  $\mathbb{K}[z]$  上の多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  を *Laurent 双直交多項式列* といい, その各項を *Laurent 双直交多項式* という.

- 任意の  $n \geq 0$  について  $\deg(P_n(z)) = n$  かつ  $P_n(0) \neq 0$  である.
- ある線形汎関数  $\mathcal{L} : \mathbb{K}[z^{-1}, z] \rightarrow \mathbb{K}$  があって, 任意の  $n \geq 0$  について直交性

$$\mathcal{L}[z^{-\ell} P_n(z)] = \begin{cases} = 0, & 0 \leq \ell \leq n-1, \\ \neq 0, & \ell = n \end{cases}$$

を持つ.

簡単のためここではさらに次の二つの条件を課す.

- 全ての  $n \geq 0$  について  $P_n(z)$  の最高次の係数は 1 である.
- $\mathcal{L}[1] = 1$  である.

Laurent 双直交多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  は 1-正規な線形汎関数  $\mathcal{L}$  と一対一に対応する. ただし線形汎関数  $\mathcal{L} : \mathbb{K}[z^{-1}, z] \rightarrow \mathbb{K}$  が 1-正規であるとは, 任意の  $n \geq 0$  についてそのモーメントのなす Toeplitz 行列式

$$T_n^{(0)} = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0 \end{bmatrix}, \quad T_n^{(1)} = \det \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-n+2} & \mu_{-n+3} & \cdots & \mu_1 \end{bmatrix}$$

where  $\mu_\ell = \mathcal{L}[z^\ell]$

が非零であることである. Laurent 双直交多項式は行列式を用いて

$$P_n(z) = (T_n^{(0)})^{-1} \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{bmatrix} \quad \text{where } \mu_\ell = \mathcal{L}[z^\ell]$$

と書かれる.

Laurent 双直交多項式版の Favard の定理は次の通りである:  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  を Laurent 双直交多項式列とするとそれは

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1, \quad P_1(z) = z - \gamma_0, \\ P_{n+1}(z) &= (z - \gamma_n)P_n(z) - \beta_n z P_{n-1}(z), \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad \text{where } \beta_n, \gamma_n \neq 0 \quad (8)$$

の形の漸化式を満たす. 逆にこの形の漸化式によりつくられる多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  は Laurent 双直交多項式列である. こうして Laurent 双直交多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  は漸化式の係数  $((\beta_n)_{n=1}^{\infty}, (\gamma_n)_{n=0}^{\infty})$  ( $\beta_n, \gamma_n \neq 0$ ) と一対一に対応する.

以上より, 1-正規な線形汎関数  $\mathcal{L}$  と漸化式の係数  $((\beta_n)_{n=1}^\infty, (\gamma_n)_{n=0}^\infty)$  ( $\beta_n, \gamma_n \neq 0$ ) が一対一に対応することが分かる. 前者を後者に写す全単射

$$\beta_n = -\frac{T_{n-1}^{(0)} T_{n+1}^{(1)}}{T_n^{(0)} T_n^{(1)}}, \quad \gamma_n = \frac{T_n^{(0)} T_{n+1}^{(1)}}{T_{n+1}^{(0)} T_n^{(1)}}, \quad (9)$$

に対してこの逆写像はどのように書かれるか. 足がかりは再び Stieltjes 関数の連分数表示である. 線形汎関数  $\mathcal{L}$  に対する Stieltjes 関数

$$-\sum_{\ell=-\infty}^{-1} \mathcal{L}[z^\ell], \quad (10a)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{L}[z^\ell] \quad (10b)$$

はそれぞれ Thron 型連分数 (T-連分数) の形に書くことができる. すなわち (10a) は

$$T^-(z^{-1}) = -\frac{z^{-1}}{\gamma_0 - z^{-1} - \frac{\beta_1 z^{-1}}{\gamma_1 - z^{-1} - \frac{\beta_2 z^{-1}}{\gamma_2 - z^{-1} - \frac{\beta_3 z^{-1}}{\dots}}}}$$

と形式的幂級数環  $\mathbb{K}[[z^{-1}]]$  の上で等しく, また (10b) は

$$T^+(z) = \frac{1}{1 - \gamma_0 z - \frac{\beta_1 z}{1 - \gamma_1 z - \frac{\beta_2 z}{1 - \gamma_2 z - \frac{\beta_3 z}{\dots}}}}$$

と  $\mathbb{K}[[z]]$  の上で等しい. ここで係数  $\beta_n, \gamma_n$  は Laurent 双直交多項式の漸化式 (8) のそれである.  $T^-(z^{-1})$  と  $T^+(z)$  は連分数として等価である. 有向グラフ  $G$  を節点集合

$$V(G) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n, \quad \mathcal{V}_n = \{(2i + n, n); i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$$

と枝集合

$$\begin{aligned} E(G) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n, \\ \mathcal{U}_n &= \{((i, n), (i+1, n+1)) \in \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_{n+1}\}, \\ \mathcal{D}_n &= \{((i, n), (i+1, n-1)) \in \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_{n-1}\}, \\ \mathcal{H}_n &= \{((i, n), (i+2, n)) \in \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n\} \end{aligned}$$

により構成されるものとする. この  $G$  上の路を *Schröder 路* という (図 2 参照).  $\mathcal{U}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{H}_n$  に含まれる枝をそれぞれ斜め上枝 (up-diagonal edge), 斜め下枝 (down-diagonal edge), 水平枝 (horizontal edge) とよぶ. Schröder 路  $\pi$  の長さを  $\ell(\pi)$  と書き

$$\ell(\pi) = \frac{1}{2}(i' - i) \quad \text{if } \pi \text{ goes from } (i, j) \text{ to } (i', j')$$

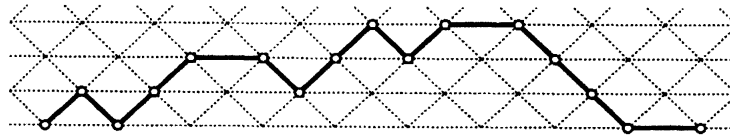


図 2: グラフ  $G$  上の Schröder 路 (長さ 9) .

と定める. また原点  $(0,0)$  を始点とし  $(2\ell, 0)$  を終点とする長さ  $\ell$  の Schröder 路の全体を  $S_\ell$  と表す. Schröder 路に重みを与える. まず  $G$  の節点と枝への二種類のラベル付け

$$\omega_-(q) = \begin{cases} (\gamma_n)^{-1}, & q \in \mathcal{V}_n, \\ 1, & q \in \mathcal{U}_n, \\ \beta_n, & q \in \mathcal{D}_n, \\ 1, & q \in \mathcal{H}_n, \end{cases} \quad \omega_+(q) = \begin{cases} 1, & q \in \mathcal{V}_n, \\ 1, & q \in \mathcal{U}_n, \\ \beta_n, & q \in \mathcal{D}_n, \\ \gamma_n, & q \in \mathcal{H}_n \end{cases} \quad (11a)$$

を考え, これを用いて Schröder 路  $\pi$  の二種類の重み  $\omega_-(\pi)$  と  $\omega_+(\pi)$  を

$$\omega_-(\pi) = \prod_{q \text{ in } \pi} \omega_-(q), \quad \omega_+(\pi) = \prod_{q \text{ in } \pi} \omega_+(q) \quad (11b)$$

と定める. ここで積は路  $\pi$  を構成する全ての節点と枝にわたってとる. 例えば図 2 の Schröder 路を  $\pi$  とおくとその重みは

$$\omega_-(\pi) = \frac{(\beta_1)^2(\beta_2)^2(\beta_3)^2}{(\gamma_0)^4(\gamma_1)^4(\gamma_2)^5(\gamma_3)^3}, \quad \omega_+(\pi) = (\beta_1)^2(\beta_2)^2(\beta_3)^2\gamma_0\gamma_2\gamma_3$$

である. 路の集合  $\Pi$  に対して

$$\omega_-(\Pi) = \sum_{\pi \in \Pi} \omega_-(\pi), \quad \omega_+(\Pi) = \sum_{\pi \in \Pi} \omega_+(\pi) \quad (11c)$$

とする. 例えば  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  かつ  $\beta_n = \gamma_n = 1$  のとき  $\omega^\pm(S_\ell) = \#S_\ell$  は large Schröder 数 (OEIS [4] の A006318 : 1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, ...) となる.

**補題 2.** Schröder 路の重みの和  $\omega_-(S_\ell)$  (resp.  $\omega_+(S_\ell)$ ) に対する母関数

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \omega_-(S_\ell) z^{-\ell-1} \quad \left( \text{resp.} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \omega_+(S_\ell) z^\ell \right)$$

はそれぞれ形式的冪級数環  $\mathbb{K}[[z^{-1}]]$  の上で  $T$ -連分数  $-T^-(z^{-1})$  に (resp.  $\mathbb{K}[[z]]$  の上で  $T^+(z)$  に) 等しい.

すなわち線形汎関数  $\mathcal{L}$  のモーメントは Schröder 路の重みの和として

$$\mathcal{L}[z^\ell] = \begin{cases} \omega_-(S_{-\ell-1}), & \ell \leq -1, \\ \omega_+(S_\ell), & \ell \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$



と書かれる。標語的にいうと、線形汎関数のモーメント  $\mathcal{L}[z^{-\ell-1}]$  と  $\mathcal{L}[z^\ell]$  ( $\ell \geq 0$ ) は  $(0, 0)$  から  $(2\ell, 0)$  への長さ  $\ell$  の Schröder 路を数え上げることにより計算することができる。例えば

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[z^{-3}] &= \omega_-(S_2) = \frac{\beta_1\beta_2}{(\gamma_0)^2(\gamma_1)^2\gamma_2} + \frac{(\beta_1)^2}{(\gamma_0)^3(\gamma_1)^2} + 2\frac{\beta_1}{(\gamma_0)^3\gamma_1} + \frac{\beta_1}{(\gamma_0)^2(\gamma_1)^2} + \frac{1}{(\gamma_0)^3}, \\ \mathcal{L}[z^{-2}] &= \omega_-(S_1) = \frac{\beta_1}{(\gamma_0)^2\gamma_1} + \frac{1}{(\gamma_0)^2}, \\ \mathcal{L}[z^{-1}] &= \omega_-(S_0) = \frac{1}{\gamma_0}, \\ \mathcal{L}[1] &= \omega_+(S_0) = 1, \\ \mathcal{L}[z] &= \omega_+(S_1) = \beta_1 + \gamma_0, \\ \mathcal{L}[z^2] &= \omega_+(S_2) = \beta_1\beta_2 + (\beta_1)^2 + 2\beta_1\gamma_0 + \beta_1\gamma_1 + (\gamma_0)^2.\end{aligned}$$

この (12) が (9) の逆写像であり、Laurent 双直交多項式の漸化式の係数  $((\beta_n)_{n=1}^\infty, (\gamma_n)_{n=0}^\infty)$  ( $\beta_n, \gamma_n \neq 0$ ) を 1-正規な線形汎関数  $\mathcal{L}$  に写す全単射である。

### 3 直交関数系と離散戸田方程式

いよいよ本題に入る。(i) 直交多項式のスペクトル変換から離散時間半無限の戸田方程式が生ずる, (ii) Laurent 双直交多項式のスペクトル変換から離散時間半無限の相対論的戸田方程式が生ずるという事実を組合せ論の言葉で示す。重みを保存する Motzkin 路と Schröder 路の変形からこれらの離散可積分系が導かれる。

任意の添字  $\heartsuit$  に対して Motzkin 路の重み  $w^\heartsuit$  を, 定義 (6) において  $w$  を  $w^\heartsuit$  で,  $b_n$  を  $b_n^\heartsuit$  で,  $c_n$  を  $c_n^\heartsuit$  で置き替えたときに得られるものとする。同様に Schröder 路の重み  $\omega_-^\heartsuit$  と  $\omega_+^\heartsuit$  を, 定義 (11) において  $\omega_-$  を  $\omega_-^\heartsuit$  で,  $\omega_+$  を  $\omega_+^\heartsuit$  で,  $\beta_n$  を  $\beta_n^\heartsuit$  で,  $\gamma_n$  を  $\gamma_n^\heartsuit$  で置き替えたときに得られるものとする。

#### 3.1 直交多項式と離散戸田方程式

直交多項式の Christoffel 変換 [6] について復習する。  $(P_n(z))_{n=0}^\infty$  を直交多項式列とし, 対応する 0-正規な線形汎関数と漸化式の係数をそれぞれ  $L, ((b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty)$  とする。直交多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^\infty$  から変換

$$\bar{P}_n(z) = \frac{P_{n+1}(z) - A_n P_n(z)}{z - \lambda} \quad \text{where } \lambda \in \mathbb{K} \text{ s.t. } P_n(\lambda) \neq 0 \text{ and } A_n = \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} \quad (13)$$

により多項式列  $(\bar{P}_n(z))_{n=0}^\infty$  をつくとこれは再び直交多項式列となる。この変換を *Christoffel 変換* という。  $(\bar{P}_n(z))_{n=0}^\infty$  に対応する線形汎関数と漸化式の係数をそれぞれ  $\bar{L}, ((\bar{b}_n)_{n=1}^\infty, (\bar{c}_n)_{n=0}^\infty)$  とする。二つの線形汎関数  $L$  と  $\bar{L}$  は

$$\bar{L} = \frac{z - \lambda}{L[z] - \lambda} L \quad (14)$$

という関係で結ばれる。一方で二組の漸化式の係数は次のように結ばれる。

命題 3. 直交多項式の *Christoffel* 変換において, 漸化式の係数  $((b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty)$  と  $((\bar{b}_n)_{n=1}^\infty, (\bar{c}_n)_{n=0}^\infty)$  は

$$\begin{aligned} (b_n - \bar{b}_n)(b_n - \bar{b}_{n-1}) &= b_n(c_n - \bar{c}_{n-1})(c_{n-1} - \bar{c}_{n-1}), \\ (b_{n+1} - \bar{b}_n)(b_n - \bar{b}_n) &= \bar{b}_n(c_n - \bar{c}_{n-1})(c_n - \bar{c}_n), \end{aligned} \quad n \geq 1 \quad (15a)$$

なる関係を持つ. ただし  $\bar{b}_0 = 0$  かつ

$$\bar{c}_0 = c_0 + \frac{b_1}{c_0 - \lambda}. \quad (15b)$$

関係式 (15) により  $((b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty)$  から  $((\bar{b}_n)_{n=1}^\infty, (\bar{c}_n)_{n=0}^\infty)$  が決まるが, これを離散的な時間発展とみると (15) は離散時間半無限の戸田方程式を与える [5]. 本節の主題は, 2 節で導入した組合せ論の言葉を用いて, 命題 3 を示すことである.

証明の鍵を握るのは (7) であり, これが直交多項式と組合せ論の対象である Motzkin 路などの平面路の間の仲立ちをする. まず第一に線形汎関数の間の関係 (14) は Motzkin 路の言葉で

$$\bar{w}(M_\ell) = \frac{w(M_{\ell+1}) - \lambda w(M_\ell)}{w(M_1) - \lambda}, \quad \ell \geq 0 \quad (16)$$

と書き換えられる. 従って Motzkin 路のラベルの間の関係式 (15) と重みの間の関係式 (16) が両立することを示せばよい. ここでは重みを保存しつつ平面路を変形することにより示すが, 特に  $\lambda = 0$  のとき Viennot [8] の証明と本質的に同等なものとなっている.

補題 4. Schröder 路のラベル  $\beta_n, \gamma_n$  を Motzkin 路のそれ  $b_n, c_n$  を用いて

$$\beta_{2n-1}\beta_{2n} = b_n, \quad \beta_{2n} + \beta_{2n+1} + \gamma_{2n} = c_n, \quad \gamma_n = \lambda \quad (17)$$

と定める. ただし  $\beta_0 = 0$  で  $\lambda$  は (13) の条件に従う. このとき任意の  $\ell \geq 0$  について重みの間の等式

$$\omega_+(S_\ell^{\text{NO}}) = w(M_\ell) \quad (18)$$

が成り立つ. ここで  $S_\ell^{\text{NO}}$  は Schröder 路の集合で

$$S_\ell^{\text{NO}} = \left\{ \pi \in S_\ell; \pi \text{ contains no horizontal edges in } \bigcup_{n=0}^{\infty} H_{2n+1} \right\}.$$

証明. まず (17) から  $\beta_n, \gamma_n$  を

$$\beta_{2n-1} = -A_{n-1}, \quad \beta_{2n} = b_n(A_{n-1})^{-1}, \quad \gamma_n = \lambda$$

と一意に決められることに注意する. 全射  $f: S_\ell^{\text{NO}} \rightarrow M_\ell$  を定める:  $S_\ell^{\text{NO}}$  の路の部分路  $\pi$  で  $(2i, 2j)$  を始点とし  $(2\ell, 0)$  を終点とするものから,  $M_\ell$  の路の部分路  $f(\pi)$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(\ell, 0)$  を終点とするものをつくる.

- $\pi = ((2\ell, 0))$  ( $(2i, 2j) = (2\ell, 0)$ ) と一節点のみからなるとき,  $f(\pi) = ((\ell, 0))$  とする.
- $\pi = ((2i, 2j), (2i+1, 2j+1), (2i+2, 2j+2))\pi'$  と二つの斜め上枝で始まるとき,  $f(\pi) = ((i, j), (i+1, j+1))f(\pi')$  とする.

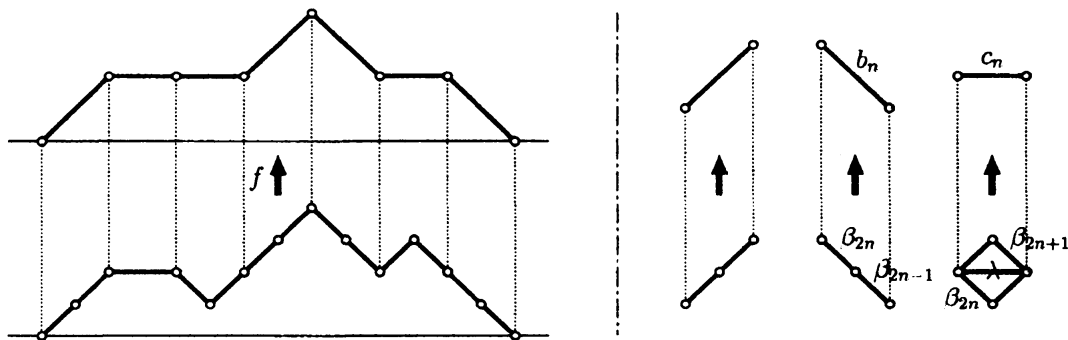


図 3: 重みを保存する平面路の変形: 全射  $f: S_\ell^{\text{NO}} \rightarrow M_\ell$ .

- $\pi = ((2i, 2j), (2i+1, 2j-1), (2i+2, 2j-2))\pi'$  と二つの斜め下枝で始まるとき,  $f(\pi) = ((i, j), (i+1, j-1))f(\pi')$  とする.
- $\pi = ((2i, 2j), (2i+1, 2j \pm 1), (2i+2, 2j))\pi'$  と斜め上枝と斜め下枝で始まるとき, または  $\pi = ((2i, 2j), (2i+2, 2j))\pi'$  と水平枝で始まるとき,  $f(\pi) = ((i, j), (i+1, j))f(\pi')$  とする.

例えば図 3 を見よ. このときラベルの付け方 (6a), (11a) と関係式 (17) より, 任意の Motzkin 路  $\pi \in M_\ell$  に対して

$$\omega_+(f^{-1}(\pi)) = w(\pi)$$

が成り立つ. この等式を  $\pi \in M_\ell$  にわたって足し合わせるにより (18) を得る.  $\square$

**補題 5.** Schröder 路のラベル  $\beta_n, \gamma_n$  が

$$\beta_n \neq 0, \quad \gamma_n = \lambda \quad (19)$$

を満たすとする. このとき任意の  $\ell \geq 0$  について重みの間の等式

$$\omega_+(S_{\ell+1}^{\text{NE}}) = \omega_+(S_{\ell+1}^{\text{NO}}) - \lambda \omega_+(S_\ell^{\text{NO}}) \quad (20)$$

が成り立つ. ここで  $S_\ell^{\text{NE}}$  は Schröder 路の集合で

$$S_\ell^{\text{NE}} = \left\{ \pi \in S_\ell; \pi \text{ contains no horizontal edges in } \bigcup_{n=0}^{\infty} H_{2n} \right\}.$$

**証明.** Schröder 路の集合  $S_{\ell+1}^{\text{NO} \nearrow}$  を

$$S_{\ell+1}^{\text{NO} \nearrow} = \{ \pi \in S_{\ell+1}^{\text{NO}}; \pi \text{ starts by the up-diagonal edge } ((0, 0), (1, 1)) \in U_0 \}$$

と定める. ラベルの付け方 (11a) より明らかに

$$\omega_+(S_{\ell+1}^{\text{NO} \nearrow}) = \omega_+(S_{\ell+1}^{\text{NO}}) - \lambda \omega_+(S_\ell^{\text{NO}}) \quad (21)$$

である. 全単射  $g: S_{\ell+1}^{\text{NO} \nearrow} \rightarrow S_{\ell+1}^{\text{NE}}$  を定める:  $S_{\ell+1}^{\text{NO} \nearrow}$  の路の部分路  $\pi$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(2\ell+2, 0)$  を終点とするものから,  $S_{\ell+1}^{\text{NE}}$  の路の部分路  $g(\pi)$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(2\ell+2, 0)$  を終点とするものをつくる.

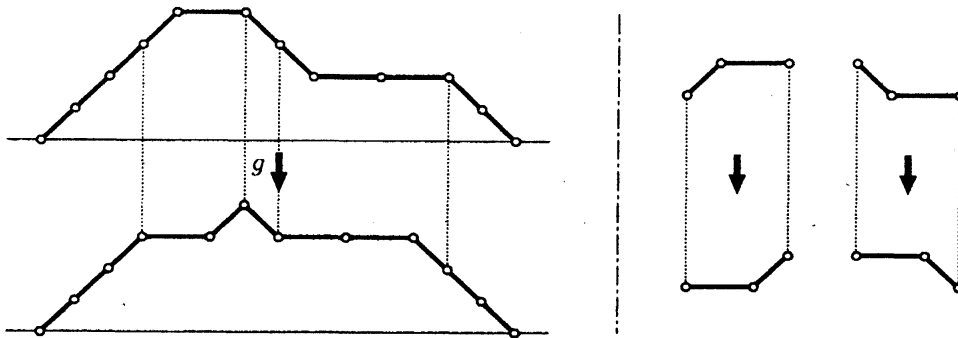


図 4: 重みを保存する平面路の変形: 全単射  $g: S_{\ell+1}^{\text{NO}} \rightarrow S_{\ell+1}^{\text{NE}}$ .

- $\pi = ((2\ell+2, 0))$  ( $(i, j) = (2\ell+2, 0)$ ) と一節点のみからなるとき,  $g(\pi) = ((2\ell+2, 0))$  とする.
- $\pi = ((i, j), (i+1, j+1), (i+3, j+1))\pi'$  と斜め上枝-水平枝で始まるとき,  $g(\pi) = ((i, j), (i+2, j))g(((i+2, j), (i+3, j+1))\pi')$  とする.
- $\pi = ((i, j), (i+1, j-1), (i+3, j-1))\pi'$  と斜め下枝-水平枝で始まるとき,  $g(\pi) = ((i, j), (i+2, j))g(((i+2, j), (i+3, j-1))\pi')$  とする.
- さもなければ,  $\pi = ((i, j), (i', j'))\pi'$  のとき,  $g(\pi) = ((i, j), (i', j'))g(\pi')$  とする.

例えば図 4 を見よ. このときラベルの付け方 (11a) より, 任意の Schröder 路  $\pi \in S_{\ell+1}^{\text{NO}}$  に対して

$$\omega_+(g(\pi)) = \omega_+(\pi)$$

が成り立つ. この等式を  $\pi \in S_{\ell+1}^{\text{NO}}$  にわたって足し合わせることで

$$\omega_+(S_{\ell+1}^{\text{NE}}) = \omega_+(S_{\ell+1}^{\text{NO}})$$

を得る. さらに (21) より (20) を得る. □

**補題 6.** Motzkin 路のラベル  $\bar{b}_n, \bar{c}_n$  を Schröder 路のそれ  $\beta_n, \gamma_n$  で (19) に従うものを用いて

$$\bar{b}_n = \beta_{2n}\beta_{2n+1}, \quad \bar{c}_n = \beta_{2n+1} + \beta_{2n+2} + \gamma_{2n+1} \quad (22)$$

と定める. このとき任意の  $\ell \geq 0$  について重みの間の等式

$$\bar{w}(M_\ell) = (\beta_1)^{-1} \omega_+(S_{\ell+1}^{\text{NE}}) \quad (23)$$

が成り立つ.

**証明.** 補題 4 と同様にして示される. ただし次の全射を用いる. Schröder 路の集合  $S_{\ell,1,1}^{\text{NE}}$  を

$$S_{\ell,1,1}^{\text{NE}} = \left\{ \pi \in \mathcal{S}; \pi \text{ goes from } (1, 1) \text{ to } (2\ell+1, 1) \text{ and contains no edges in } \bigcup_{n=0}^{\infty} H_{2n} \right\}$$

と定める. 全射  $h: S_{\ell,1,1}^{\text{NE}} \rightarrow M_\ell$  を定める:  $S_{\ell,1,1}^{\text{NE}}$  の路の部分路  $\pi$  で  $(2i+1, 2j+1)$  を始点とし  $(2\ell+1, 1)$  を終点とするものから,  $M_\ell$  の路の部分路  $h(\pi)$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(\ell, 0)$  を終点とするものをつくる.

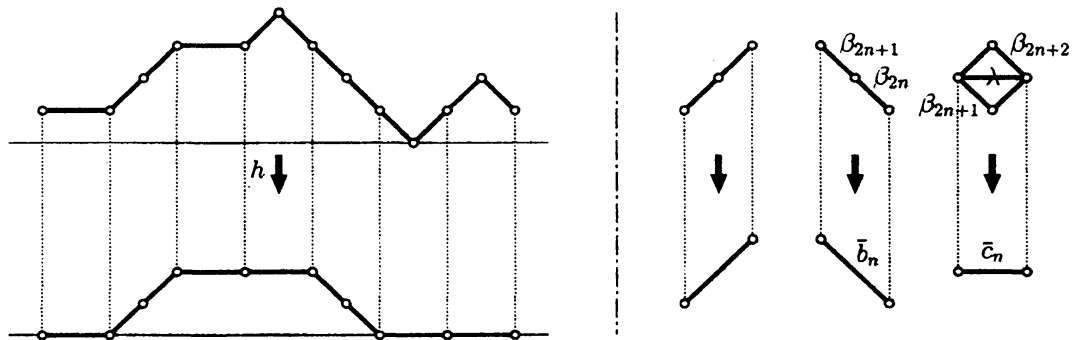


図 5: 重みを保存する平面路の変形: 全射  $h: S_{\ell,1,1}^{\text{NE}} \rightarrow M_{\ell}$ .

- $\pi = ((2\ell+1, 1))$  ( $(2i+1, 2j+1) = (2\ell+1, 1)$ ) と一節点のみからなるとき,  $h(\pi) = ((2\ell+1, 1))$  とする.
- $\pi = ((2i+1, 2j+1), (2i+2, 2j+2), (2i+3, 2j+3))\pi'$  と二つの斜め上枝で始まるとき,  $h(\pi) = ((i, j), (i+1, j+1))h(\pi')$  とする.
- $\pi = ((2i+1, 2j+1), (2i+2, 2j), (2i+3, 2j-1))\pi'$  と二つの斜め下枝で始まるとき,  $h(\pi) = ((i, j), (i+1, j-1))h(\pi')$  とする.
- $\pi = ((2i+1, 2j+1), (2i+2, 2j+2), (2i+3, 2j+1))\pi'$ ,  $\pi = ((2i+1, 2j+1), (2i+2, 2j), (2i+3, 2j+1))\pi'$  と斜め上枝と斜め下枝で始まるとき, または  $\pi = ((2i+1, 2j+1), (2i+3, 2j+1))\pi'$  と水平枝で始まるとき,  $h(\pi) = ((i, j), (i+1, j))h(\pi')$  とする.

例えば図 5 を見よ.

□

以上三つの補題から次が分かる. (17) と (22) から Schröder 路のラベルを消去することにより (15) を得る. 同時に (18), (20), (23) から Schröder 路の重みを消去することにより (16) を得る. 従って Motzkin 路のラベルの間の関係式 (15) と重みの間の関係式 (16) は両立する. 以上により命題 3 は示された.

### 3.2 Laurent 双直交多項式と離散戸田方程式

Laurent 双直交多項式に対して同様の議論を試みる. Laurent 双直交多項式に対しても直交多項式の Christoffel 変換の類似を考えることができる.  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  を Laurent 双直交多項式列とし, 対応する 1-正規な線形汎関数と漸化式の係数をそれぞれ  $\mathcal{L}$ ,  $((\beta_n)_{n=1}^{\infty}, (\gamma_n)_{n=0}^{\infty})$  ( $\beta_n, \gamma_n \neq 0$ ) とする. Laurent 双直交多項式列  $(P_n(z))_{n=0}^{\infty}$  から変換

$$\bar{P}_n(z) = \frac{P_n(z) - \mathcal{A}_n P_n(z)}{z - \lambda} \quad \text{where } \lambda \in \mathbb{K} \text{ s.t. } P_n(\lambda) \neq 0 \text{ and } \mathcal{A}_n = \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} \quad (24)$$

により多項式列  $(\bar{P}_n(z))_{n=0}^{\infty}$  をつくと,  $\bar{P}(0) \neq 0$  ならばこれは再び Laurent 双直交多項式列となる. この変換を Laurent 双直交多項式の Christoffel 変換という.  $(\bar{P}_n(z))_{n=0}^{\infty}$  に対応する線形汎関数と漸化式の係数をそれぞれ  $\bar{\mathcal{L}}$ ,  $((\bar{\beta}_n)_{n=1}^{\infty}, (\bar{\gamma}_n)_{n=0}^{\infty})$  とすると, Christoffel 変換 (24) は漸化式を用

いては

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{z - \lambda}{\mathcal{L}[z] - \lambda} \mathcal{L} \quad (25)$$

と、漸化式の係数を用いては

$$\bar{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1} - \mathcal{A}_n}{\beta_n - \mathcal{A}_{n-1}} \beta_n, \quad \bar{\gamma}_n = \frac{\gamma_{n+1} + \mathcal{A}_{n+1}}{\gamma_n + \mathcal{A}_n} \gamma_n \quad (26)$$

と書かれる。関係式 (26) により  $((\beta_n)_{n=1}^\infty, (\gamma_n)_{n=0}^\infty)$  から  $((\bar{\beta}_n)_{n=1}^\infty, (\bar{\gamma}_n)_{n=0}^\infty)$  が決まるが、これを離散的な時間発展とみると (26) は離散時間半無限の相対論的戸田方程式を与える [3]。

本節では以下  $\lambda = 0$  の場合のみを考える。このとき線形汎関数  $\mathcal{L}$  が 2-正規すなわち任意の  $n \geq 0$  について Toeplitz 行列式

$$T_n^{(2)} = \det \begin{bmatrix} \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-n+3} & \mu_{-n+4} & \cdots & \mu_2 \end{bmatrix} \quad \text{where } \mu_\ell = \mathcal{L}[z^\ell]$$

が非零ならばまたそのときに限り、(24) により定まる  $(\bar{\mathcal{P}}_n(z))_{n=0}^\infty$  は Laurent 双直交多項式列となる。以下この条件を仮定するが、これは漸化式の係数  $((\beta_n)_{n=1}^\infty, (\gamma_n)_{n=0}^\infty)$  が任意の  $n \geq 0$  について

$$\beta_{n+1} + \gamma_n \neq 0$$

を満たすことと等価である。Christoffel 変換 (24), (25) は  $\lambda = 0$  の下ではそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_n(z) &= z^{-1}(\mathcal{P}_{n+1}(z) - \mathcal{A}_n \mathcal{P}_n(z)) \quad \text{where } \mathcal{A}_n = \frac{\mathcal{P}_{n+1}(0)}{\mathcal{P}_n(0)}, \\ \bar{\mathcal{L}} &= \frac{z}{\mathcal{L}[z]} \mathcal{L} \end{aligned} \quad (27)$$

となり、また (26) は次のようになる。

**命題 7.** Laurent 双直交多項式の Christoffel 変換 ( $\lambda = 0$ ) において、漸化式の係数  $((\beta_n)_{n=1}^\infty, (\gamma_n)_{n=0}^\infty)$  と  $((\bar{\beta}_n)_{n=1}^\infty, (\bar{\gamma}_n)_{n=0}^\infty)$  は

$$\bar{\beta}_n = \frac{\beta_{n+1} + \gamma_n}{\beta_n + \gamma_{n-1}} \beta_n, \quad \bar{\gamma}_n = \frac{\beta_{n+1} + \gamma_n}{\beta_n + \gamma_{n-1}} \gamma_{n-1} \quad (28)$$

なる関係を持つ。ただし  $\beta_0 = 0$  かつ  $\gamma_{-1} = 1$ 。

本節の主題は、2 節で導入した組合せ論の言葉を用いて、命題 7 を示すことである。

証明にあたって (12) が鍵となる。これにより線形汎関数の間の関係 (27) は Schröder 路の言葉で

$$\bar{\omega}_-(S_{\ell+1}) = \frac{\omega_-(S_\ell)}{\omega_+(S_1)}, \quad \ell \geq 0, \quad (29a)$$

$$\bar{\omega}_-(S_0) = \frac{\omega_+(S_0)}{\omega_+(S_1)}, \quad (29b)$$

$$\bar{\omega}_+(S_\ell) = \frac{\omega_+(S_{\ell+1})}{\omega_+(S_1)}, \quad \ell \geq 0 \quad (29c)$$

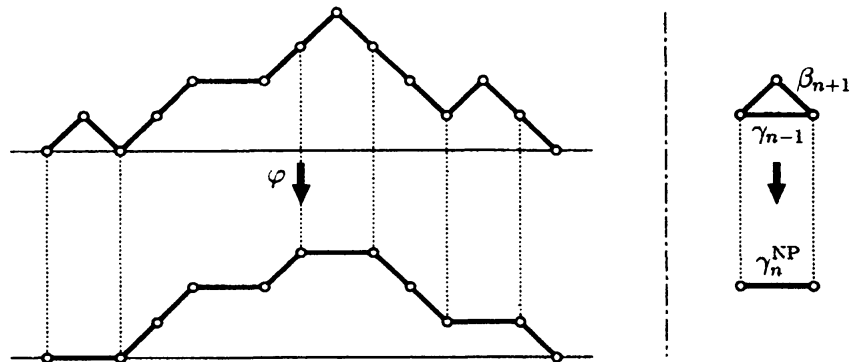


図 6: 重みを保存する平面路の変形: 全射  $\varphi: S_\ell \rightarrow S_\ell^{\text{NP}}$ .

と書き換えられる. 従って Schröder 路のラベルの間の関係式 (28) と重みの間の関係式 (29) が両立することをみればよい. ここでも重みを保存しつつ平面路を変形することで示す. より詳細には [2] を参照のこと. Schröder 路が  $((i-1, j-1), (i, j), (i+1, j-1))$  (resp.  $((i-1, j+1), (i, j), (i+1, j+1))$ ) の形の部分路を含むときその節点  $(i, j)$  を頂 (peak) (resp. 谷 (valley)) とよぶ.

補題 8. Schröder 路のラベル  $\beta_n^{\text{NP}}, \gamma_n^{\text{NP}}$  を同  $\beta_n, \gamma_n$  を用いて

$$\beta_n^{\text{NP}} = \beta_n, \quad \gamma_n^{\text{NP}} = \beta_{n+1} + \gamma_n \quad (30)$$

と定める. このとき任意の  $\ell \geq 0$  について重みの間の等式

$$\omega_+^{\text{NP}}(S_\ell^{\text{NP}}) = \omega_+(S_\ell) \quad (31)$$

が成り立つ. ここで  $S_\ell^{\text{NP}}$  は Schröder 路の集合で

$$S_\ell^{\text{NP}} = \{\pi \in S_\ell; \pi \text{ contains no peaks}\}.$$

証明. 全射  $\varphi: S_\ell \rightarrow S_\ell^{\text{NP}}$  を定める:  $S_\ell$  の路の部分路  $\pi$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(2\ell, 0)$  を終点とするものから,  $S_\ell^{\text{NP}}$  の路の部分路  $\varphi(\pi)$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(2\ell, 0)$  を終点とするものをつくる.

- $\pi = ((2\ell, 0))$  ( $(i, j) = (2\ell, 0)$ ) と一節点のみからなるとき,  $\varphi(\pi) = ((2\ell, 0))$  とする.
- $\pi = ((i, j), (i+1, j+1), (i+2, j))\pi'$  と二つ目の節点が頂であるとき,  $\varphi(\pi) = ((i, j), (i+2, j))\varphi(\pi')$  とする.
- さもないければ,  $\pi = ((i, j), (i', j'))\pi'$  のとき,  $\varphi(\pi) = ((i, j), (i', j'))\varphi(\pi')$  とする.

例えば 6 を見よ. ラベルの付け方 (11a) と関係式 (30) より, 任意の Schröder 路  $\pi \in S_\ell^{\text{NP}}$  に対して

$$\omega_+^{\text{NP}}(\pi) = \omega_+(\varphi^{-1}(\pi))$$

が成り立つ. この等式を  $\pi \in S_\ell^{\text{NP}}$  にわたって足し合わせることで (31) を得る.  $\square$

補題 9. Schröder 路のラベル  $\beta_n^{\text{NV}}, \gamma_n^{\text{NV}}$  を同  $\beta_n^{\text{NP}}, \gamma_n^{\text{NP}}$  ( $\gamma_n^{\text{NP}} \neq 0$ ) を用いて

$$\beta_n^{\text{NV}} \gamma_{n-1}^{\text{NV}} = \beta_n^{\text{NP}} \gamma_n^{\text{NP}}, \quad \gamma_n^{\text{NV}} = \gamma_n^{\text{NP}} \quad (32)$$

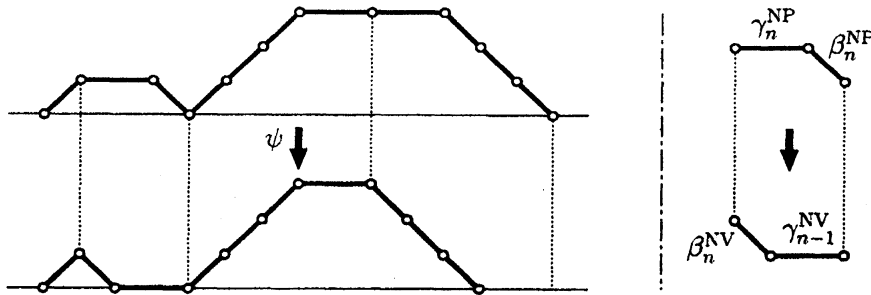


図 7: 重みを保存する平面路の変形: 全単射  $\psi: S_{\ell+1}^{\text{NP}} \rightarrow S_{\ell}^{\text{NV}}$ .

と定める. このとき任意の  $\ell \geq 0$  について重みの間の等式

$$\omega_+^{\text{NV}}(S_{\ell}^{\text{NV}}) = (\gamma_0^{\text{NP}})^{-1} \omega_+(S_{\ell+1}^{\text{NP}}) \quad (33)$$

が成り立つ. ここで  $S_{\ell}^{\text{NV}}$  は Schröder 路の集合で

$$S_{\ell}^{\text{NV}} = \{\pi \in S_{\ell}; \pi \text{ contains no valleys}\}.$$

**証明.** 全単射  $\psi: S_{\ell+1}^{\text{NP}} \rightarrow S_{\ell}^{\text{NV}}$  を定める:  $S_{\ell+1}^{\text{NP}}$  の路の部分路  $\pi$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(2\ell+2, 0)$  を終点としかつ少なくとも一つの水平枝を持つものから,  $S_{\ell}^{\text{NV}}$  の路の部分路  $\psi(\pi)$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(2\ell, 0)$  を終点するものをつくる.

- $\pi = ((2\ell, 0), (2\ell+2, 0))$  ( $(i, j) = (2\ell, 0)$ ) と一つの水平枝のみからなるとき,  $\psi(\pi) = ((2\ell, 0))$  とする.
- $\pi = ((i, j), (i+2, j), (i+3, j-1))\pi'$  と水平枝-斜め下枝で始まるとき,  $\psi(\pi) = ((i, j), (i+1, j-1))\psi(((i+1, j-1), (i+3, j-1))\pi')$  とする.
- さもないければ,  $\pi = ((i, j), (i', j'))\pi'$  のとき,  $\psi(\pi) = ((i, j), (i', j'))\psi(\pi')$  とする.

例えば図 7 を見よ. ラベルの定め方 (11a), (32) より, 任意の Schröder 路  $\pi \in S_{\ell+1}^{\text{NP}}$  に対して

$$\omega_+^{\text{NV}}(\psi(\pi)) = (\gamma_0^{\text{NP}})^{-1} \omega_+^{\text{NP}}(\pi)$$

が成り立つ. この等式を  $\pi \in S_{\ell+1}^{\text{NP}}$  にわたって足し合わせることで (33) を得る.  $\square$

**補題 10.** Schröder 路のラベル  $\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n$  を同  $\beta_n^{\text{NV}}, \gamma_n^{\text{NV}}$  を用いて

$$\bar{\beta}_n = \beta_n^{\text{NV}}, \quad \bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n = \gamma_n^{\text{NV}} \quad (34)$$

と定める. このとき任意の  $\ell \geq 0$  について重みの間の等式

$$\bar{\omega}_+(S_{\ell}) = \omega_+^{\text{NV}}(S_{\ell}^{\text{NV}}) \quad (35)$$

が成り立つ.

**証明.** 補題 8 と同様にして示される. ただし次の全射  $\rho: S_{\ell} \rightarrow S_{\ell}^{\text{NV}}$  を用いる:  $S_{\ell}$  の路の部分路  $\pi$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(2\ell, 0)$  を終点とするものから,  $S_{\ell}^{\text{NV}}$  の路の部分路  $\rho(\pi)$  で  $(i, j)$  を始点とし  $(2\ell, 0)$  を終点とするものをつくる.



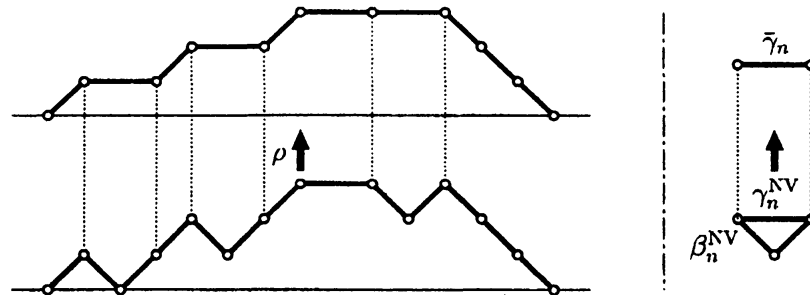


図 8: 重みを保存する平面路の変形: 全射  $\rho: S_\ell \rightarrow S_\ell^{NV}$ .

- $\pi = ((2\ell, 0))$  ( $(i, j) = (2\ell, 0)$ ) と一節点のみからなるとき,  $\rho(\pi) = ((2\ell, 0))$  とする.
- $\pi = ((i, j), (i+1, j-1), (i+2, j))\pi'$  と二つ目の節点が谷であるとき,  $\rho(\pi) = ((i, j), (i+2, j))\rho(\pi')$  とする.
- さもなければ,  $\pi = ((i, j), (i', j'))\pi'$  のとき,  $\rho(\pi) = ((i, j), (i', j'))\rho(\pi')$  とする.

例えば図 8 を見よ.

□

以上三つの補題から次が分かる. (30), (32), (34) からラベル  $\beta_n^{NP}, \gamma_n^{NP}$  と  $\beta_n^{NV}, \gamma_n^{NV}$  を消去することにより (28) を得る. 同時に (31), (33), (35) から (29c) を得る. 従ってラベルの (28) と重みの (29c) は両立する. 同様にしてラベルの (28) と重みの (29a) が両立することが示される. 最後にラベルの (28) と重みの (29b) は自明に両立する. これらをひっくるめて, Schröder 路のラベルの間の関係式 (28) と重みの間の関係式 (29) は両立する. 以上により命題 7 は示された.

## 参考文献

- [1] P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, Discrete Math. **32** (1980), no. 2, 125–161.
- [2] S. Kamioka, A combinatorial representation with Schröder paths of biorthogonality of Laurent biorthogonal polynomials, Electron. J. Combin. **14** (2007), no. 1, Research Paper 37, 22 pp. (electronic).
- [3] S. Kharchev, A. Mironov and A. Zhedanov, Faces of relativistic Toda chain, Internat. J. Modern Phys. A **12** (1997), no. 15, 2675–2724.
- [4] N.J.A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at [www.research.att.com/~njas/sequences/](http://www.research.att.com/~njas/sequences/).
- [5] V. Spiridonov and A. Zhedanov, Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials, Meth. Appl. Anal. **2** (1995), 369–398.
- [6] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, fourth edition, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

- [7] G. Viennot, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, Notes de conférences données à l'UQAM, Montréal, 1983.
- [8] X. G. Viennot, A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm, Formal power series and algebraic combinatorics (Moscow, 2000), 379–390, Springer, Berlin, 2000.
- [9] A. Zhedanov, The “classical” Laurent biorthogonal polynomials, J. Comput. Appl. Math. **98** (1998), no. 1, 121–147.